Схема Бернулли

- Если производится несколько испытаний, причем вероятность события А в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют независимыми повторными испытаниями.

- В разных независимых испытаниях событие А может иметь либо различные вероятности, либо одну и ту же вероятность. Будем далее рассматривать лишь такие независимые испытания, в которых событие А имеет одну и ту же вероятность.

Примеры:

1. Подбрасываем игральный кубик n раз. Выпадение числа очков от 1 до 6 происходит с вероятностью 1/6 в каждом из испытаний;
2. Приобретаем n лотерейных билетов. Для каждого из лотерейных билетов вероятность выигрыша есть величина постоянная;
3. Подбрасывается n раз монета. Выпадение орла или решки происходит с вероятностью ½ в каждом испытании.

Пример 1 и примеры 2,3 отличаются друг от друга тем, что в первом примере возможно появление 6-ти событий, а во втором и третьем – появление только 2-х событий: выиграл - не выиграл, орел – решка, т.е. условно можно назвать такие исходы «успех – неуспех». Такие испытания называются **испытаниями Бернулли**.

Независимые повторные испытания, в каждом из которых возможно появление события А (успех) с постоянной вероятностью p или непоявление события А (неуспех) с постоянной вероятностью q=1-p, называются **испытаниями Бернулли** или **схемой Бернулли.**

Швейцарский математик
Якоб Бернулли (1654-1705).

Формула Бернулли.

Пусть производится n испытаний Бернулли. Вероятность того, что в этих испытаниях событие А произойдет ровно m раз можно найти по **формуле Бернулли:**

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

n – число испытаний

p – вероятность появления события А в одном испытании

q=1-p - вероятность не появления события А в одном испытании

$P_n(m)$ – вероятность того, что событие А появится ровно m раз в n испытаниях

Пример. Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжении суток не превысит установленной нормы, равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму.

Решение. Обозначим А- расход не превысит норму.

По условию n = 7, m = 4, p = 0.75, q=1-p=0,25

По формуле Бернулли: $$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

$$P_7(4) = C_7^4 \cdot p^4 \cdot q^{7-4} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^3 = 35 \cdot 0{,}316 \cdot 0{,}0156 \approx 0{,}172$$

Ответ: вероятность того, что в ближайшую неделю расход электроэнергии в течении четырех суток не превысит норму равна 0,172

Пример. Два равносильных шахматиста играют в шахматы. Что вероятнее: выиграть одному из них 2 партии из 4-х или 3 партии из 6-ти?

Решение.

1) Найдем вероятность выиграть одному из них 2 партии из 4-х: $n=4$, $m=2$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_4(2)=C_4^2\cdot p^2\cdot q^{4-2}=\frac{4!}{2!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

2) Найдем вероятность выиграть одному из них 3 партии из 6-ти: $n=6$, $m=3$, $p=1/2$, $q=1/2$. По формуле Бернулли:

$$P_6(3)=C_6^3\cdot p^3\cdot q^{6-3}=\frac{6!}{3!\cdot 3!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=20\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{16}$$

Сравним полученные результаты: т.к. $3/8 > 5/16$, то вероятнее выиграть одному из них 2 партии из 4-х.

Наивероятнейшее число появлений события.

Пример. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найти вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных.

Решение. Вероятность изготовления бракованной детали
$P = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.
Искомые вероятности находим по формуле Бернулли:

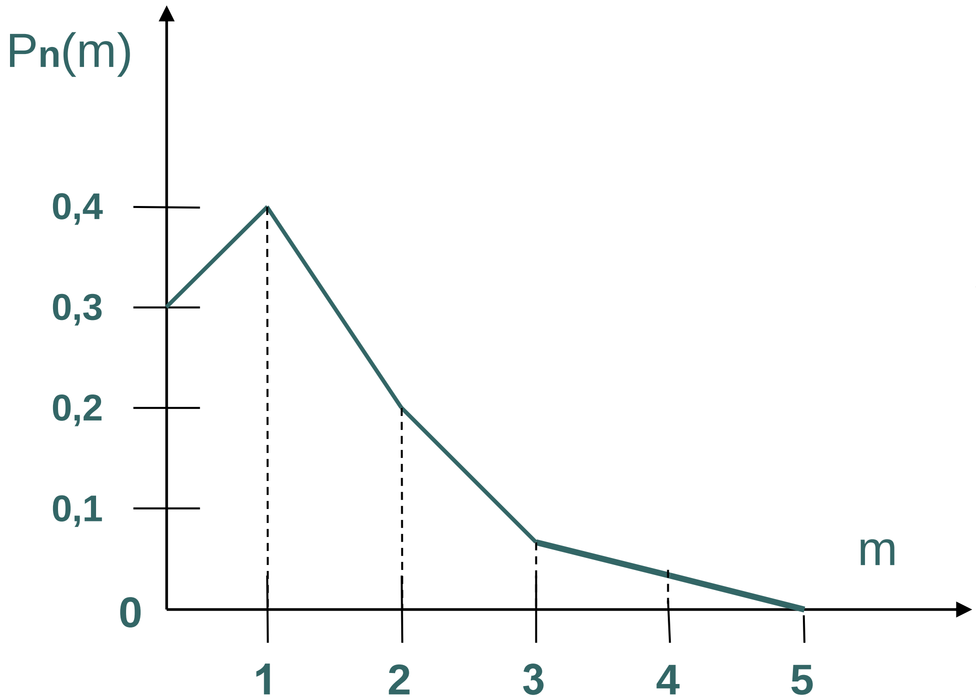
$P_5(0)=0{,}32768$; $P_5(3)=0{,}0512$;

$P_5(1)=0{,}4096$; $P_5(4)=0{,}0064$;

$P_5(2)=0{,}2048$; $P_5(5)=0{,}00032$.

Полученные вероятности изобразим графически точками с координатами $(m, P_n(m))$. Соединяя эти точки, получим **многоугольник, или полигон, распределения вероятностей.**

Наивероятнейшее число появлений события.



Рассматривая многоугольник распределения вероятностей мы видим, что есть такие значения m (в данном случае, одно - $m_0=1$), обладающие наибольшей вероятностью $P_n(m)$.

Наивероятнейшее число появлений события.

Число m_0 наступления события А в n независимых испытаниях называется **наивероятнейшим**, если вероятность осуществления этого события $P_n(m_0)$ по крайней мере не меньше вероятностей других событий $P_n(m)$ при любом m.

Для нахождения m_0 используется двойное неравенство:

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p$$

Пример. В результате многолетних наблюдений вероятность дождя 21 июля в городе N составляет 0,3. Найти наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет.

Решение. По условию: $p=0.3$, $q=0.7$, $n=30$.

$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p$

$0.3 \cdot 30 - 0.7 \le m_0 \le 0.3 \cdot 30 + 0.3$

$8.3 \le m_0 \le 9.3$

$m_0 = 9$

Ответ: наивероятнейшее число дождливых дней 21 июля на ближайшие 30 лет равно 9.

Т.е. вероятнее всего 9 раз за 30 лет 21 июля будет дождливым.

Приближённые формулы в схеме Бернулли.

Локальная теорема Лапласа.

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над громадными числами. Например, если

n = 50, m = 30, p=0,1, то для отыскания вероятности $P_{30}(50)$ надо вычислить выражение $$P_{50}(30) = C_{50}^{30} \cdot 0{,}1^{30} \cdot 0{,}9^{20}$$

Нельзя ли вычислить интересующую нас вероятность, не прибегая к формуле Бернулли? Оказывается, можно. **В этом случае применяются приближённые (**асимптотические) формулы, которые позволяют приближенно найти вероятность появления события ровно m раз в n испытаниях, если число испытаний достаточно велико.

Приближённые формулы

1. Локальная формула Муавра-Лапласа (n>10, p>0,1).

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

2. Формула Пуассона (n>10, p<0,1)

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, где \quad x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

3. Интегральная формула Муавра-Лапласа

$$P_n(a \le m \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad x_1 = \frac{a - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \quad x_2 = \frac{b - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Локальная формула Муавра-Лапласа (**n·p·q ≥ 10**).

.

Если вероятность p появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие А появится в n испытаниях ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}},$$

где

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \qquad x = \frac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Значения функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	39986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	0,3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	0,3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	0,3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	0,3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	0,3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	0,3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	0,3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	0,2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	0,2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	0,2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	0,1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	0,1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	0,1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	0,1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	0,1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0,0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0,0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0,0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0,0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0,0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0,0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0,0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0,0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0,0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0,0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0,0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0,0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0,0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0,0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0,0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0,0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0,0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0,0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0,0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0,0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0,0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Пользуясь этой таблицей, необходимо иметь в виду **свойства функции** $\varphi(x)$: $\varphi(-x) = \varphi(x)$

1. Функция $\varphi(x)$ является четной, т.е. .

2. Функция $\varphi(x)$ — монотонно убывающая при положительных значениях x, причем при $x \to \infty,\ \varphi(x) \to 0.$

(Практически можно считать, что уже при x > 5 $\varphi(x) \approx 0$).

Пример. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Найти вероятность того, что из 400 семей 300 имеют холодильники.
Решение. Вероятность того, что семья имеет холодильник, равна
n = 400, *m* = 300, *p* = 80/100 = 0,8 (>0,1), *q=1-p*= = 0,2.

- *npq* = 400 · 0,8· (1—0,8) = 64 > 10;
- $x = \dfrac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}} = \dfrac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{8} \approx -2{,}5$.
- По таблице найдем

$$\varphi(-2{,}5) = \varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175$$

$$P_{400}(300) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} \approx \frac{0{,}0175}{8} \approx 0.0022$$

Формула Пуассона ($\lambda \le 10$).

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянно близка к нулю, число независимых испытаний n достаточно велико, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит m раз приближенно равна

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{где} \quad \lambda = n \cdot p$$

Формулу Пуассона можно применять при $\lambda \le 10$.

Существуют статистико-математические таблицы для распределения Пуассона.

Значения функции Пуассона

$$P_k(\lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812	0,496585	0,449329	0,406570
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287	0,347610	0,359463	0,365913
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786	0,121663	0,143785	0,164661
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757	0,028388	0,038343	0,049398
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964	0,004968	0,007669	0,011115
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356	0,000695	0,001227	0,002001
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035	0,000081	0,000164	0,000300
7					0,000001	0,000003	0,000008	0,000019	0,000039
8								0,000002	0,000004

λ	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,367879	0,135335	0,049787	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,367879	0,270671	0,149361	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,183940	0,270671	0,224042	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,061313	0,180447	0,224042	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,015328	0,090224	0,168031	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,003066	0,036089	0,100819	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,000511	0,012030	0,050409	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,000073	0,003437	0,021604	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,000009	0,000859	0,008101	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,000001	0,000191	0,002701	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124007	0,131756
10		0,000038	0,000810	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11		0,000007	0,000221	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12		0,000001	0,000055	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13			0,000013	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14			0,000003	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15			0,000001	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16				0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17				0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18					0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19					0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20						0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21						0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22							0,000003	0,000022	0,000108
23							0,000001	0,000008	0,000042
24								0,000003	0,000016
25								0,000001	0,000006
26									0,000002
27									0,000001

Существуют статистико-математические таблицы для распределения Пуассона.

Пример. На факультете насчитывается 1825 студентов. Какова вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета (в году 365 дней)?

Решение. n = 1825, m=4, p = 1/365(<0,1) - вероятность того, что день рождения студента 1 сентября,

λ = np = 1825 • (1/365) = 5 < 10, то применяем формулу Пуассона:

$$P_{1825}(4) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{5^4}{4!} \cdot e^{-5} = \frac{625}{24 \cdot e^5} = \frac{625}{24 \cdot 2.7^5} \approx \frac{625}{3443.7377} \approx 0.18$$

По таблицам можно точнее и быстрее найти P(m,λ). Так для данного примера $P_{1825}(4) = P(m, \lambda) = P(4,5) \approx 0.17547$.

Ответ: вероятность того, что 1 сентября является днем рождения одновременно четырех студентов факультета равна 0,17547.

Интегральная теорема Лапласа (**n·p >10**)

Интегральная теорема Муавра—Лапласа. Если вероятность *p* наступления события А в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что число *m* наступления события А в *n* независимых испытаниях заключено в пределах от *a* до *b* (включительно), при достаточно большом числе *n* приближенно равна $P_n(a \le m \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2} dt, \qquad x_1 = \frac{a - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}, \qquad x_2 = \frac{b - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$$

Значения функции Лапласа

$$y = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

x	y	x	y	x	y	x	y
0,00	00000						
0,01	0,0040	0,13	0,0517	0,25	0,0987	0,37	0,1443
0,02	0,0080	0,14	0,0557	0,26	0,1026	0,38	0,1480
0,03	0,0120	0,15	0,0596	0,27	0,1064	0,39	0,1517
0,04	0,0160	0,16	0,0636	0,28	0,1103	0,40	0,1554
0,05	0,0199	0,17	0,0675	0,29	0,1141	0,41	0,1591
0,06	0,0239	0,18	0,0714	0,30	0,1179	0,42	0,1628
0,07	0,0279	0,19	0,0753	0,31	0,1217	0,43	0,1664
0,08	0,0319	0,20	0,0793	0,32	0,1255	0,44	0,1700
0,09	0,0359	0,21	0,0832	0,33	0,1293	0,45	0,1736
0,10	0,0398	0,22	0,0871	0,34	0,1331	0,46	0,1772
0,11	0,0438	0,23	0,0910	0,35	0,1368	0,47	0,1808
0,12	0,0478	0,24	0,0948	0,36	0,1406	0,48	0,1844

Функция *Ф(x)* называется **функцией Лапласа.**

Свойства функции *Ф(x)*:

1. Функция *Ф(x)* нечетная, т.е. *Ф(-x) = - Ф(x).*
2. Функция Ф(x) монотонно возрастающая, (практически можно считать, что уже при *x* > 5, *Ф(x)* ≈ 0,5).

x	y	x	y	x	y	x	y
0,49	0,1879	1,02	0,3461	1,55	0,4394	2,16	0,4846
0,50	0,1915	1,03	0,3485	1,56	0,4406	2,18	04854
0,51	0,1950	1,04	0,3508	1,57	0,4418	2,20	0,4861
0,52	0,1985	1,05	0,3531	1,58	0,4429	2,22	0,4868
0,53	0,2019	1,06	0,3554	1,59	0,4441	2,24	0,4875
0,54	0,2054	1,07	0,3577	1,60	0,4452	2,26	0,4881
0,55	0,2088	1,08	0,3599	1,61	0,4463	2,28	0,4887
0,56	0,2123	1,09	0,3621	1,62	0,4474	2,30	0,4893
0,57	0,2157	1,10	0,3643	1,63	0,4484	2,32	0,4898
0,58	0,2190	1,11	0,3665	1,64	0,4495	2,34	0,4904
0,59	0,2224	1,12	0,3686	1,65	0,4505	2.36	0,4908
0,60	0,2257	1,13	0,3708	1,66	0,4515	2,38	0,4913
0,61	0,2291	1,14	0,3729	1,67	0,4525	2,40	0,4918
0,62	0,2324	1,15	0,3749	1,68	0,4535	2,42	0,4922
0,63	0,2357	1,16	0,3770	1,69	0,4545	2,44	0,4927
0,64	0,2389	1,17	0,3790	1,70	0,4554	2,46	0,4931
0,65	0,2422	1,18	0,3810	1,71	0,4564	2,48	0,4934
0,66	0,2454	1,19	0,3830	1,72	0,4573	2,50	0,4938
0,67	0,2486	1,20	0,3849	1,73	0,4582	2,52	0,4941
0,68	0,2517	1,21	0,3869	1,74	0,4591	2,54	0,4945
0,69	0,2549	1,22	0,3888	1,75	0,4599	2,56	0,4948
0,70	0,2580	1,23	0,3907	1,76	0,4608	2,58	0,4951
0,71	0,2611	1,24	0,3925	1,77	0,4616	2,60	0,4953
0,72	0,2642	1,25	0,3914	1,78	0,4625	2,62	0,4956
0,73	0,2673	1,26	0,3962	1,79	0,4633	2,64	0,4959
0,74	0,2703	1,27	0,3980	1,80	0,4641	2,66	0,4961
0,75	0,2734	1,28	0,3997	1,81	0,4649	2,68	0,4963
0,76	0,2764	1,29	0,4015	1,82	0,4656	2,70	0,4965
0,77	0,2794	1,30	0,4032	1,83	0,4664	2,72	0,4967
0,78	0,2823	1,31	0,4049	1,84	0,4671	2,74	0,4969
0,79	0,2852	1,32	0,4066	1,85	0,4678	2,76	0,4971
0,80	0,2881	1,33	0,4082	1,86	0,4686	2,78	0,4973
0,81	0,2910	1,34	0,4099	1,87	0,4693	2,80	0,4974
0,82	0,2939	1,35	0,4115	1,88	0,4699	2,82	0,4976
0,83	0,2967	1,36	0,4131	1,89	0,4706	2,84	0,4977
0.84	0,2995	1,37	0,4147	1,90	0,4713	2,86	0,4979
0,85	0,3023	1,38	0,4162	1,91	0,4719	2,88	0,4980
0,86	0,3051	1,39	0,4177	1,92	0,4726	2,90	0,4981
0,87	0,3078	1,40	0,4192	1,93	0,4732	2,92	0,4982
0,88	0,3106	1,41	0,4207	1,94	0,4738	2,94	0,4984
0,89	0,3133	1,42	0,4222	1,95	0,4744	2,96	0,4985
0,90	0,3159	1,43	0,4236	1,96	0,4750	2,98	0,4986
0,91	0,3186	1,44	0,4251	1,97	0,4756	3,00	0,49865
0,92	0,3112	1,45	0,4265	1,98	0,4761	3,20	0,49931
0,93	0,3238	1,46	0,4279	1,99	0,4767	3,40	0,49966
0,94	0,3264	1,47	0,4292	2,00	0,4772	3,60	0,499841
0,95	0,3289	1,48	0,4306	2,02	0,4783	3,80	0,499928
0,96	0,3315	1,49	0,4319	2,04	0,4793	4,00	0,499968
0,97	0,3340	1,50	0,4332	2,06	0,4803	4,50	0,499997
0,98	0,3365	1,51	0,4345	2,08	0,4812	5,00	0,49999997
0,99	0,3389	1,52	0,4357	2,10	0,4821		
1,00	0,3413	1,53	0,4370	2,12	0,4830		
1,01	0,3438	1,54	0,4382	2,14	0,4838		

Пример. В некоторой местности из каждых 100 семей 80 имеют холодильники. Необходимо найти вероятность того, что из 400 семей от 300 до 360 семей (включительно) имеют холодильники.

Решение. n = 400, a = 300, b = 360, p = 80/100 = 0,8, q =1-p= 0,2,

1. a<m<b, значит, можно применить интегральную теорему Лапласа.
2. $x_1 = \frac{a-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} = \frac{300-400\cdot 0.8}{\sqrt{400\cdot 0.8\cdot 0.2}} = \frac{-20}{8} = -2.5$; $x_2 = \frac{b-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot q}} = \frac{360-400\cdot 0.8}{\sqrt{400\cdot 0.8\cdot 0.2}} = \frac{40}{8} = 5$
3. *По таблице:* $\Phi(-2,5) = -\Phi(2,5) \approx -0,4938$, $\Phi(5) \approx 0,499997$;

Тогда $P_{400}(300 \le m \le 360) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0,499997 - (-0,4938) = 0,993793$.

Ответ: вероятность того, что от 300 до 360 семей (включительно) имеют холодильники равна 0,993793.

Независимые повторные испытания. Схема

Наивероятнейшее число

$n \cdot p - q \le m_0 \le n \cdot p + p$

Независимые повторные испытания

n невелико, p (или q) не очень мало	**n велико, p (или q) не очень мало**	**n велико, p (или q) очень мало**
Формула Бернулли	**Формула Лапласа**	**Формула Пуассона**
$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$	$P_n(m) \approx \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$	$P_n(m) \approx \dfrac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$
	$x = \dfrac{m - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot q}}$	$\lambda = n \cdot p$
npq < 10	npq >= 10	np < 10

Независимые повторные испытания. Задачи.

Задача 1. По результатам проверок налоговыми инспекциями установлено, что в среднем каждое второе малое предприятие региона имеет нарушение финансовой дисциплины. Найти вероятность того, что из 1000 зарегистрированных в регионе малых предприятий имеют нарушения финансовой дисциплины:
а) 480 предприятий; б) наивероятнейшее число предприятий;
в) не менее 480; г) от 480 до 520.

Задача 2. Вероятность малому предприятию быть банкротом за время t равна 0,2. Найти вероятность того, что из шести малых предприятий за время t сохранятся: а) два; б) более двух.

Задача 3. В банк отправлено 4000 пакетов денежных знаков. Вероятность того, что пакет содержит недостаточное или избыточное число денежных знаков, равна 0,0001. Найти вероятность того, что при проверке будет обнаружено: а) три ошибочно укомплектованных пакета; б) не более трех пакетов.