«Основные теоремы теории вероятностей»

Учебные вопросы.

1. Теорема сложения вероятностей для несовместных событий.

2. Теорема умножения вероятностей.

3. Теорема сложения вероятностей для совместных событий.

4. Условные вероятности. Зависимые и независимые события.

5.Формула полной вероятности. Формула Байеса.

В теория вероятностей случайные события рассматриваются с точки зрения теории множеств, что позволяет определить отношения над ними.

Теорема сложения вероятностей суммы несовместных событий.

Теорема. *Вероятность суммы несовместных событий А и В равна сумме вероятностей этих событий:*

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Произведением двух событий А и В называют событие (АВ), состоящее в совместном появлении событий А и В.

Теорема умножения для независимых событий

Вероятность произведения двух **независимых событий** равна произведению их вероятностей: **$P(AB)= P(A)P(B)$.**

Для трех **независимых** событий А,В,С формула принимает вид: **$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$.**

Пример 1.

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

Решение:

Всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

$p_1 = \frac{4}{20} = 0{,}2$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

$p_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

По теореме сложения несовместных событий: $p = p_1 + p_3 = 0{,}2 + 0{,}35 = 0{,}55$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

Ответ: 0,55

Пример 2 . Найти вероятность совместного поражения цели двумя орудиями, если вероятность поражения цели первым орудием (событие А) равна 0,7, а вторым (событие В) - 0,6.

Решение. События А и В независимые, поэтому, по теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB)= P(A)\,P(B) = 0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42.$$

Ответ: 0,42

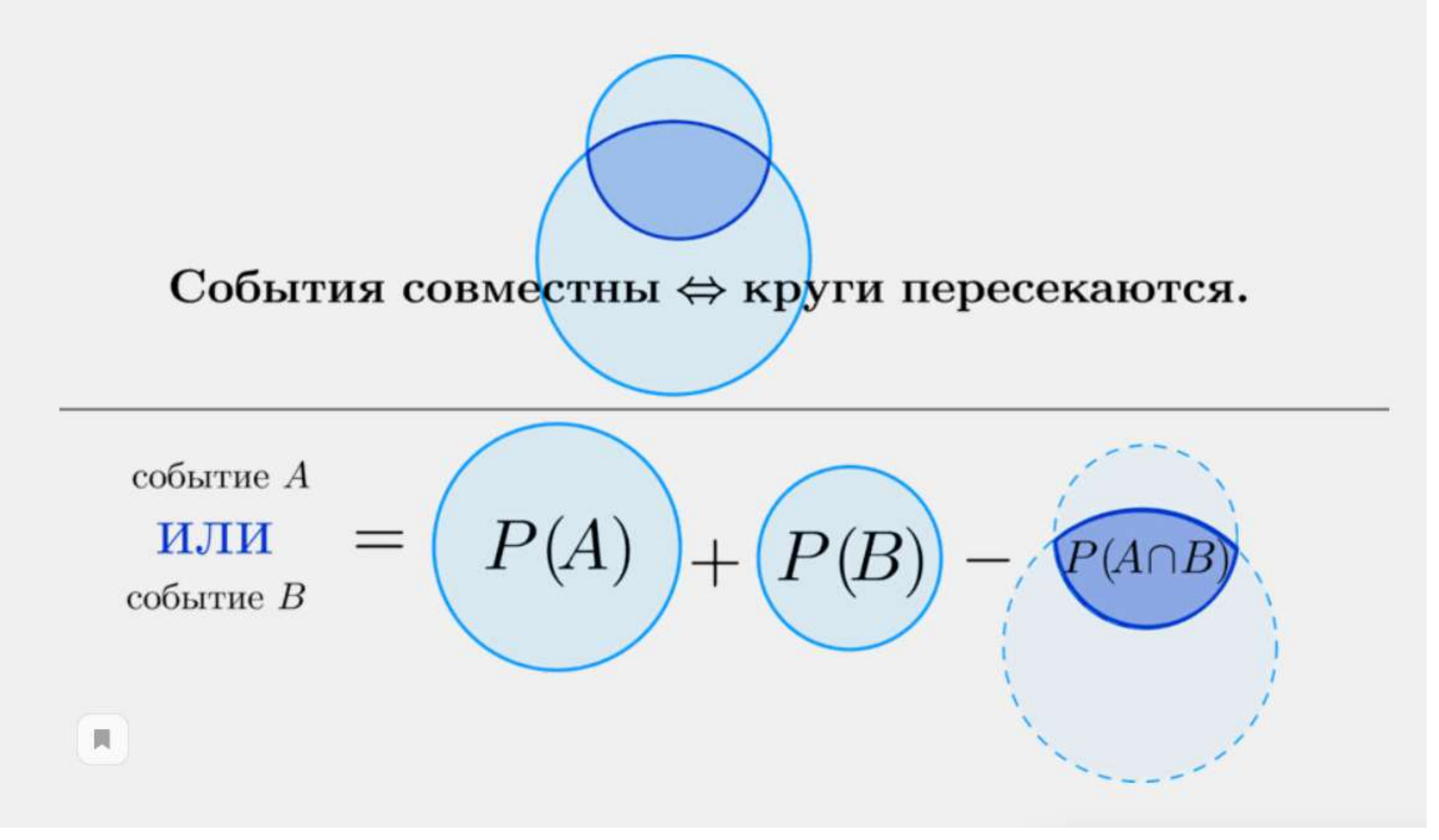
Теорема сложения вероятностей совместных событий

Два события называют *совместными,* если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)= P(A)+P(B)- P(AB).$$

Задачи на сумму вероятностей совместных независимых событий



ПРИМЕР 3. Бросаются два игральных кубика. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Решение. Обозначим события:

A — появление шестерки на первом кубике,

B — на втором кубике;

Эти события совместные, т.е. шестерка может выпасть как на первом, так и на втором кубике.

Для вычислений воспользуемся формулой:

$$\mathbf{P(A+B)= P(A)+P(B)- P(AB)}$$

$$\mathbf{P(A+B) =} \quad \frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36};$$

Ответ: 11/36.

Пример 4. На автогонках при заезде на первой автомашине вероятность победить $P_1 = 0,6$, при заезде на второй автомашине $P_2 = 0,9$.

Найти:

вероятность того, что победят обе автомашины;

вероятность того, что победит первая или вторая машина;

Решение.

1) Вероятность того, что победит первая автомашина, не зависит от результата второй автомашины, поэтому события *A* (победит первая автомашина) и *B* (победит вторая автомашина) – независимые события. Но может победить как одна, так и другая машина, значит эти события совместные.

2) Найдём вероятность того, что победят обе машины:

$P(AB) = 0,6 \cdot 0,9 = 0,54$;

3) Найдём вероятность того, что победит одна из двух автомашин:

$P(A + B) = 0,6 + 0,9 - 0,54 = 0,96$;

Ответ: 0,96

Полная группа событий

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2,…, A_n, образующих полную группу, равна единице:

$$\mathbf{P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.}$$

Теорема.

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Пример 5.

Вероятность того, что день будет дождливым, p=0,7. Найти вероятность того, что день будет ясным.

Решение. События «день дождливый» и «день ясный»- противоположные, поэтому искомая вероятность

q=1-p=1-0,7=0,3

Пример 6. Стрелок стреляет по мишени, разделенной на 3 области. Вероятность попадания в первую область равна 0,45, во вторую- 0,35. Найти вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает либо в первую, либо во вторую область.

Решение. События А- « стрелок попал в первую область» и В- « стрелок попал во вторую область»- несовместны (попадание в одну область исключает попадание в другую), поэтому теорема сложения применима.

Искомая вероятность

$P(A+B)= P(A)+P(B)=0,45+0,35=0,80$

Ответ: 0,8

Условная вероятность.

События, независимые в совокупности.

Зависимые и независимые события.

Событие А называют **независимым** от события В, если вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет.

Событие А называют **зависимым** от события В, если вероятность события А зависит от того, произошло событие В или нет.

Условная вероятность

Определение.

Вероятность события А , вычисленная при условии, что произошло событие В , называется условной вероятностью события А и обозначается так: $P(A/B)$, или $P_B(A)$.

Определение. Два события А и В называются независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от появления или не появления другого,

$$P_B(A)=p(A); \quad p_A(B)=p(B).$$

Теорема. Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$\mathbf{P(AB)=P(A)P_A(B)} \quad \mathbf{(1)}$$

Замечание. Применив формулу (1) к событию BA, получим

$$\mathbf{P(BA)=P(B)P_B(A).} \quad \mathbf{(2)}$$

Так как AB=BA ,то

а сравнивая (1) и (2), получаем равенство

$$\mathbf{P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).}$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных. При этом вероятность каждого последующего события подсчитывается в предположении, что все предыдущие события уже появились.

В частности, для трех событий

$$\mathbf{P(ABC)=P(A)\,P_A(B)P_{AB}(C).}$$

Пример 7.

Из колоды в 36 карт последовательно извлекаются 2 карты. Найти вероятность того, что вторая карта окажется червой, если до этого:

а) была извлечена черва;
б) была извлечена карта другой масти.

Решение:

Рассмотрим событие: B – вторая карта будет червой.

а) Если сначала была извлечена черва (событие A), то в колоде осталось 35 карт, среди которых теперь находится 8 карт червовой масти. По **классическому определению**:

$$P_A(B) = \frac{8}{35}$$

– вероятность того, что вторая карта окажется червой **при условии**, что до этого тоже была извлечена черва.

б) Если же сначала была извлечена карта другой масти (событие $\overline{A}$), то все 9 черв остались в колоде. По **классическому определению**:

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{9}{35}$$

– вероятность того, что вторая карта окажется червой **при условии**, что до этого была извлечена карта другой масти.

Ответ: $a)\frac{8}{35}; б)\frac{9}{35}.$

Пример 8.

Требуется отыскать вероятность **совместного появления** зависимых событий. Как, например, найти вероятность события , состоящего в том, что из полной колоды будет извлечена черва **и** затем ещё одна черва?

Решение.

Применим формулу: $\mathbf{P(AB)=P(A)P_A(B)}$;

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{9}{36}\cdot\frac{8}{35}=\frac{2}{35}\approx 0{,}0571$$

Ответ: 0,0571.

Пример 9.

В конверте находится 10 лотерейных билетов, среди которых 3 выигрышных. Из конверта последовательно извлекаются билеты. Найти вероятности того, что 3-й билет будет выигрышным, если предыдущие два билета были выигрышными;

Решение:

Применим формулу

$P(ABC)=P(A)\,P_A(B)P_{AB}(C)$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{120}\approx 0{,}0083$$

Ответ: 0,0083

Теорема. (о вероятности наступления хотя бы одного из n независимых событий).

Теорема. Если **события $A_1, A_2, \ldots, A_n$** независимы в совокупности, то вероятность наступления хотя бы одного из этих событий (т.е. вероятность суммы) вычисляется по формуле

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\ldots P(\overline{A}_n).$$

Пример 10. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: p_1=0,8; p_2=0,7; p_3=0,9.

Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1 (попадание первого орудия), A_2 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям $A_{\mathbf{1}}$, A_2 и A_3 (т.е. вероятности промахов), соответственно равны:

$q_1=1-p_1=1-0,8=0,2;$

$q_2=1-p_2=1-0,7=0,3;$

$q_3=1-p_3=1-0,9=0,1.$

Искомая вероятность

$P(A)=1-q_1q_2q_3= 1-0,2\cdot 0,3\cdot 0,1=0,994.$

«Формула полной вероятности. Формула Байеса»

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Следствием основных теорем вероятностей – теорем сложения и умножения вероятностей – является формула полной вероятности.

Постановка задачи.

Допустим событие А может наступает при появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Эти события образуют полную группу. Такие события B_i называются **гипотезами.**

Также даны вероятности этих событий и условные вероятности

$$P_{B_1}(A),\ \ P_{B_1}(A),\ldots,P_{B_n}(A)$$

события А. Для нахождения вероятности события А можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема (*формула полной вероятности*)

Пусть несовместные события $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образуют полную группу. Тогда вероятность события А, которое может наступить только при условии появления одного из этих несовместных событий

равняется сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots$$

$$\ldots + P(B_n)P_{B_n}(A),$$

где $P(B_1)$- вероятность события B_1 ;

$P(B_2)$ - вероятность события B_2 ;

$P(B_i)$ - вероятность события B_i ;

$P_{B_i}(A)-$ условная вероятность события А при условии, что произошло событие B_i .

Эту формулу называют «формулой полной вероятности».

Пример 11. В магазин поступает изделия с двух фабрик, причем 40% из них изготовлены фабрикой №1, а остальные – фабрикой №2. Фабрика №1 дает 90% изделий первого сорта, а фабрикой №2 75%. Какова вероятность того, что купленное наудачу изделие окажется первого сорта?

Решение. Рассмотрим события:

А - изделие, купленное наудачу, первого сорта;

B_1- изделие произведено на фабрике №1;

B_2- изделие произведено на фабрике №2;

Так как событие А может состояться лишь при условии выполнения одной из гипотез В1 или В2, то по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A).$$

Найдем вероятности гипотез, входящие в эту формулу. Так как на каждые 100 поступивших в магазин изделий 40 изготовлено фабрикой №1 (40%), а остальные 60 – фабрикой №2, то

P(B1)=40/100=0,4;

P(B2)=60/100=0,6

По условию задачи

$$P_{B_1}(A) = 0{,}9;$$

$$P_{B_2}(A) = 0{,}75;$$

Подставляя найденные вероятности в формулу (**), получим:

$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}75=0{,}81$

Следствия формулы полной вероятности. Формулы Байеса.

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Эти формулы носят название формул Байеса, благодаря которым можно оценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в результате которого появилось событие А.

Условная вероятность любой гипотезы B_i ($i=1,2,3,\ldots,n$) рассчитывается следующим образом:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Пример 12. В цехе работают 20 станков, изготавливающих одинаковые детали. Из них 10 станков- 1-го типа, 6станков – 2-го типа, а остальные – 3-го типа.

Вероятности того, что качество детали окажется отличным на станках этих типов, равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Производительность всех типов станков одинакова.

Какова вероятность, что наугад взятая деталь, изготовленная в цехе, окажется отличного качества?

Наугад взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность , что она была изготовлена на станке 1-го типа?

Решение.

Обозначим события:

A- наугад взятая деталь отличного качества;

B_1 - наугад взятая деталь изготовлена на станке 1-го типа;

B_2 - наугад взятая деталь изготовлена на станке 2-го типа;

B_3 - наугад взятая деталь изготовлена на станке 3-го типа;

Так как производительность всех типов станков одинакова, то количество деталей, изготовленных на станках данного типа, пропорционально количеству станков. Поэтому

$P(B_1)=10/20=0,5;$

$P(B_2)=6/20=0,3;$

$P(B_3)=4/20=0,2$

Вероятности $p_{B_i}(A)$ даны в условии задачи:

$P_{B_1}(A) = 0{,}9;$

$P_{B_2}(A) = 0{,}8;$

$P_{B_3}(A) = 0{,}7.$

1. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$

$$= 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}83;$$

2. По формуле Байеса получим ответ на второй вопрос

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}9}{0{,}83} = 0{,}54.$$