

The background of the slide features a 3D wireframe grid. On the left side, there is a large wireframe sphere. In the center-right, a smaller wireframe sphere sits atop a wireframe cylinder. The grid lines are light gray and recede into the distance, creating a sense of depth. The overall color palette is a mix of light grays and soft oranges.

# **Геометрическая вероятность**

# Основной вопрос:

- Как связано понятие вероятности с геометрией?

# Серия опытов.

Серия опытов, приводящих к определению вероятности из геометрических соображений.

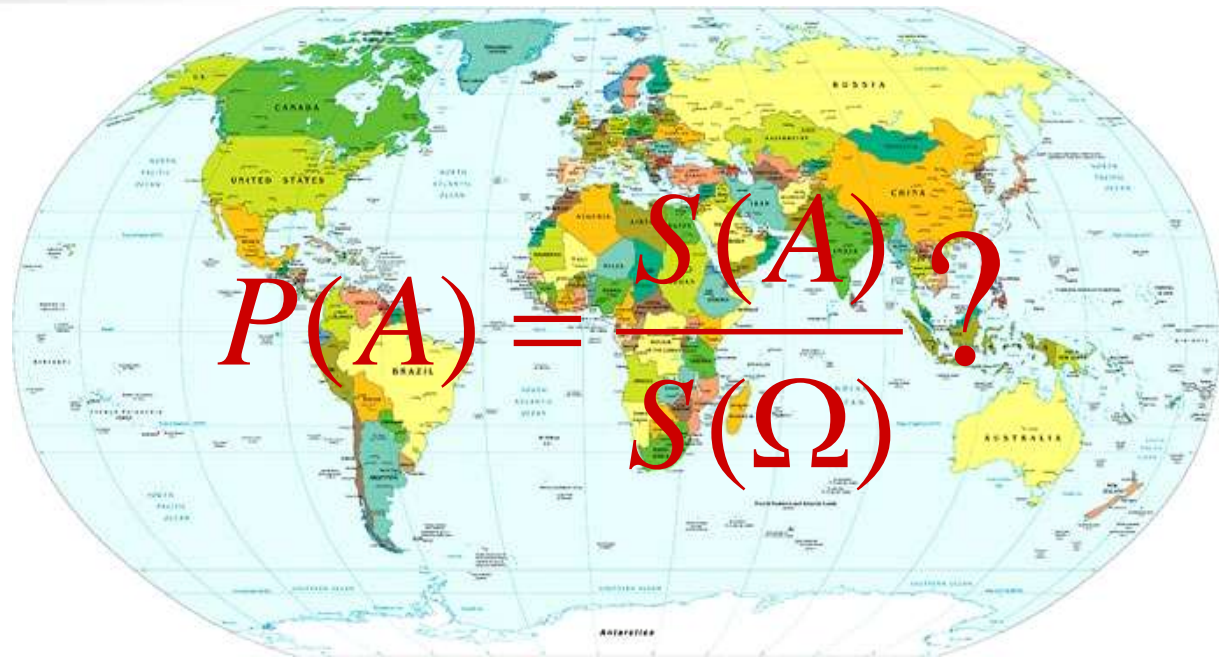


**ОПЫТ 1.** Выберем на географической карте мира случайную точку (например, зажмурим глаза и покажем указкой). Какова вероятность, что эта точка окажется в России?



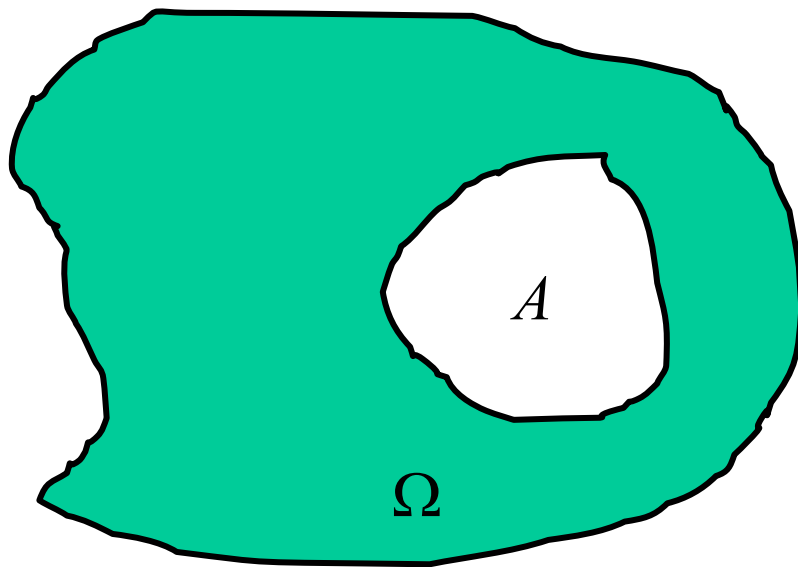
**Число исходов бесконечно.  
Вероятность будет зависеть от  
размера карты (масштаба).**

**ОПЫТ 1.** Выберем на географической карте мира случайную точку (например, зажмурим глаза и покажем указкой). Какова вероятность, что эта точка окажется в России?



**ГИПОТЕЗА:** Очевидно, для ответа на вопрос нужно знать, какую часть всей карты занимает Россия. Точнее, какую часть всей площади карты составляет Россия. Отношение этих площадей и даст искомую вероятность.

**Общий случай:** в некоторой ограниченной области  $\Omega$  случайно выбирается точка. Какова вероятность, что точка попадет в область  $A$ ?



$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

# Геометрическое определение вероятности

Если предположить, что попадание в любую точку области  $\Omega$  равновозможно, то вероятность попадания случайной точки в заданное множество  $A$  будет равна отношению площадей:

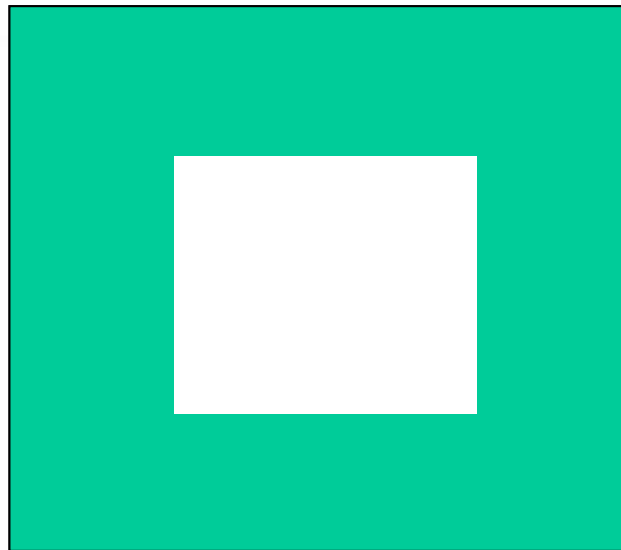
$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

Если  $A$  имеет нулевую площадь, то вероятность попадания в  $A$  равна нулю.

Можно определить геометрическую вероятность в пространстве и на прямой:

$$P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}; P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$$

**ОПЫТ 2.** В квадрат со стороной 4 см «бросают» точку. Какова вероятность, что расстояние от этой точки до ближайшей стороны квадрата будет меньше 1 см?

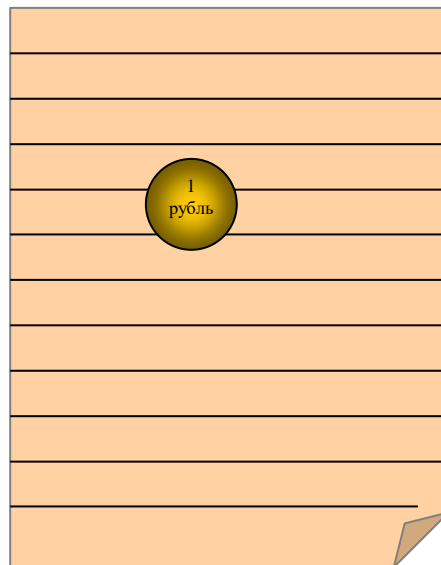


Закрасим в квадрате множество точек, удаленных от ближайшей стороны меньше, чем на 1 см.

Площадь закрашенной части квадрата  $16\text{см}^2 - 4\text{см}^2 = 12\text{см}^2$ .

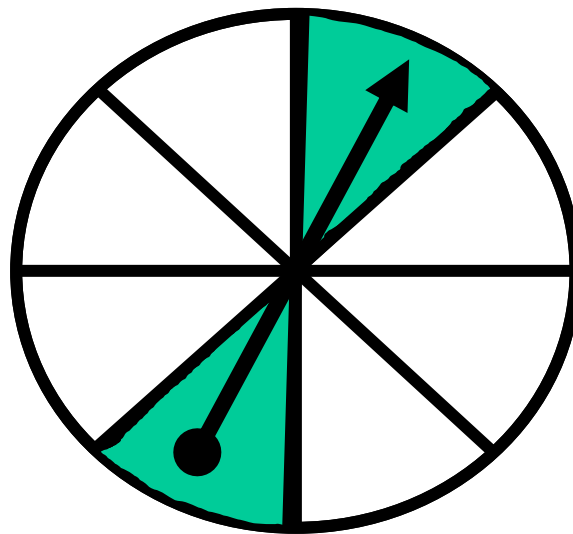
Значит, 
$$P(A) = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0,75$$

**ОПЫТ 3.** На тетрадный лист в линейку наудачу бросается монета. Какова вероятность того, что монета пересекла две линии?



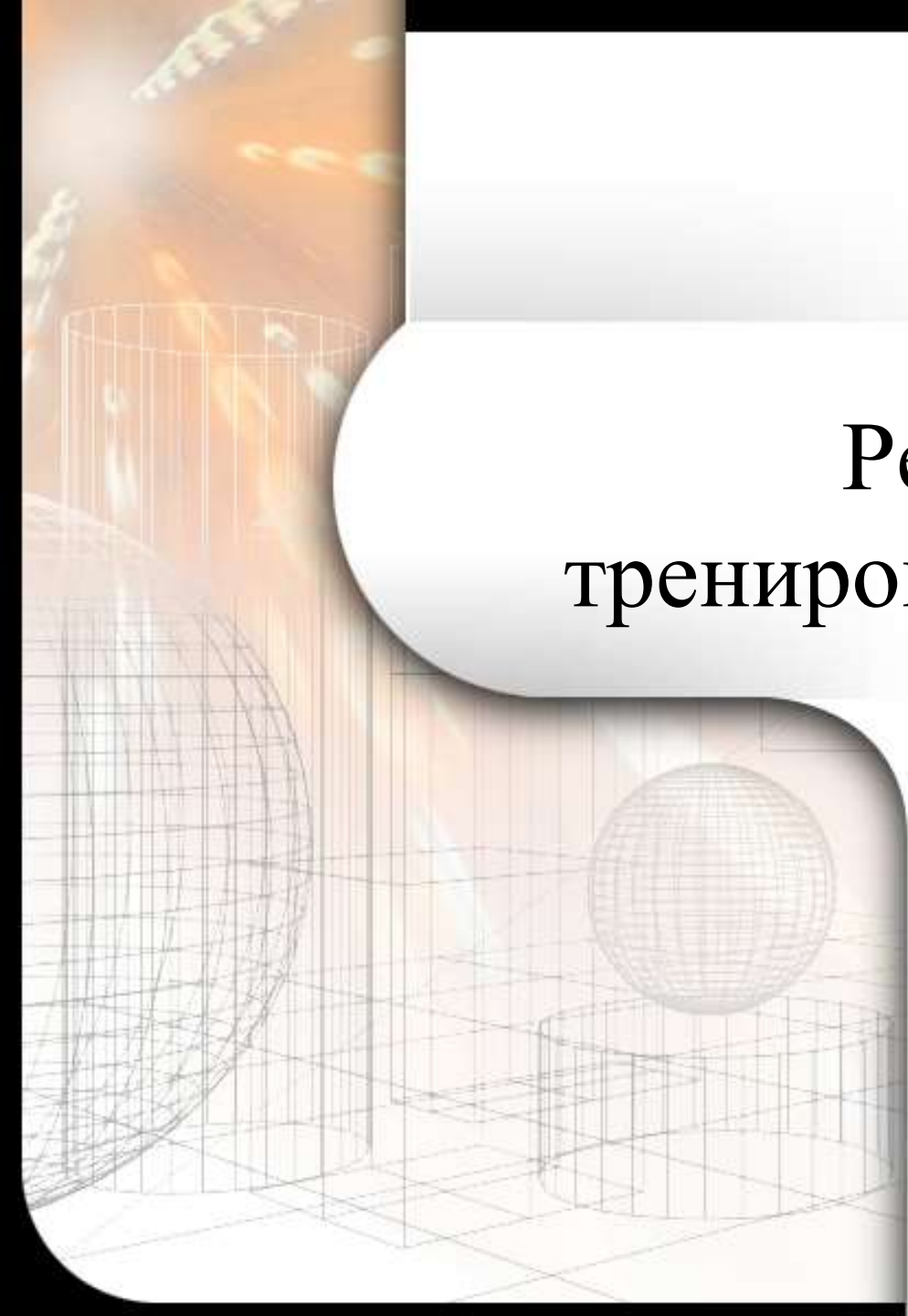
✘ Число исходов зависит от размеров монеты, расстояния между линиями.

**ОПЫТ 4.** В центре вертушки закреплена стрелка, которая раскручивается и останавливается в случайном положении. С какой вероятностью стрелка вертушки остановится на зеленом секторе?



Для решения этой задачи можно вычислить площадь зеленых секторов и разделить ее на площадь всего круга:

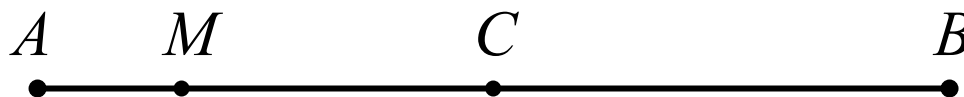
$$S(A) = \frac{\pi R^2}{4}; S(\Omega) = \pi R^2; P(A) = \frac{1}{4} = 0,25$$

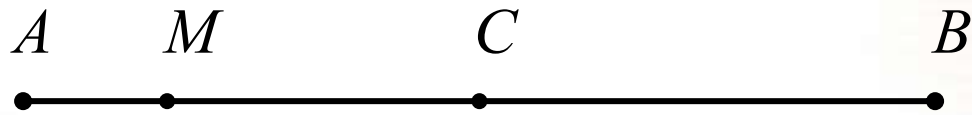
A 3D wireframe scene featuring a sphere and a cylinder on a grid floor. The sphere is on the left, and the cylinder is on the right. The background is a gradient of orange and yellow. The text is centered in a white, rounded rectangular box.

**Решение  
тренировочных задач.**

# Задача №1.

Дано:  $AB = 12\text{см}$ ,  $AM = 2\text{см}$ ,  $MC = 4\text{см}$ . На отрезке  $AB$  случайным образом отмечается точка  $X$ . Какова вероятность того, что точка  $X$  попадет на отрезок:  
1)  $AM$ ; 2)  $AC$ ; 3)  $MC$ ; 4)  $MB$ ; 5)  $AB$ ?





**Решение.**

1)  $A = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } AM\}$ ,  $AM = 2\text{см}$ ,  $AB = 12\text{см}$ ,

$$P(A) = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

2)  $B = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } AC\}$ ,  $AC = 2\text{см} + 4\text{см} = 6\text{см}$ ,

$$P(B) = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

3)  $C = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } MC\}$ ,  $MC = 4\text{см}$ ,  $AB = 12\text{см}$ ,

$$P(C) = \frac{MC}{AB} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

4)  $D = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } MB\}$ ,  $MB = 12\text{см} - 2\text{см} = 10\text{см}$ ,

$$P(D) = \frac{MB}{AB} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

5)  $E = \{\text{точка } X \text{ попадает на отрезок } AB\}$ ,

$$P(A) = \frac{AB}{AB} = 1$$

**Задача №2.** Оконная решетка состоит из клеток со стороной 20см. В решетку 100 раз бросили наугад один и тот же мяч. В 50 случаях он пролетел через решетку не задев ее. Оцените приближенно радиус мяча.

**Решение.**

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

$$P(A) = \frac{S_{\text{мяча}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{\pi R^2}{400}$$

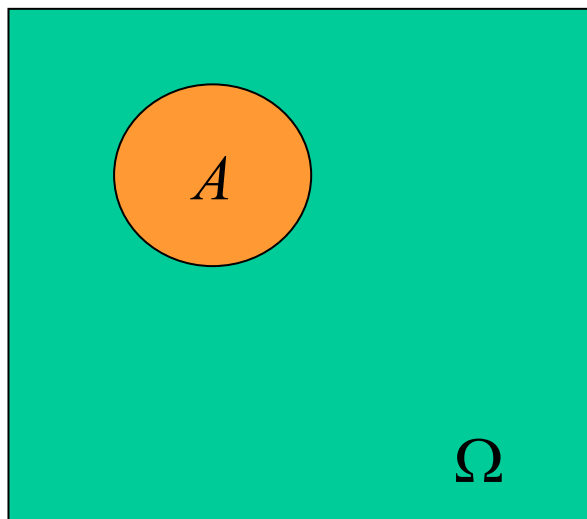
$$\frac{\pi R^2}{400} = \frac{1}{2}$$

$$R^2 = \frac{400}{2 \cdot \pi} = \frac{200}{\pi}$$

$$R = \sqrt{\frac{200}{\pi}} = \frac{10\sqrt{2}}{\pi} \approx 4,5(\text{см})$$

## Задача №3.

Внутри квадрата со стороной 10см выделен круг радиусом 2см. Случайным образом внутри квадрата отмечается точка. Какова вероятность того, что она попадет в выделенный круг?



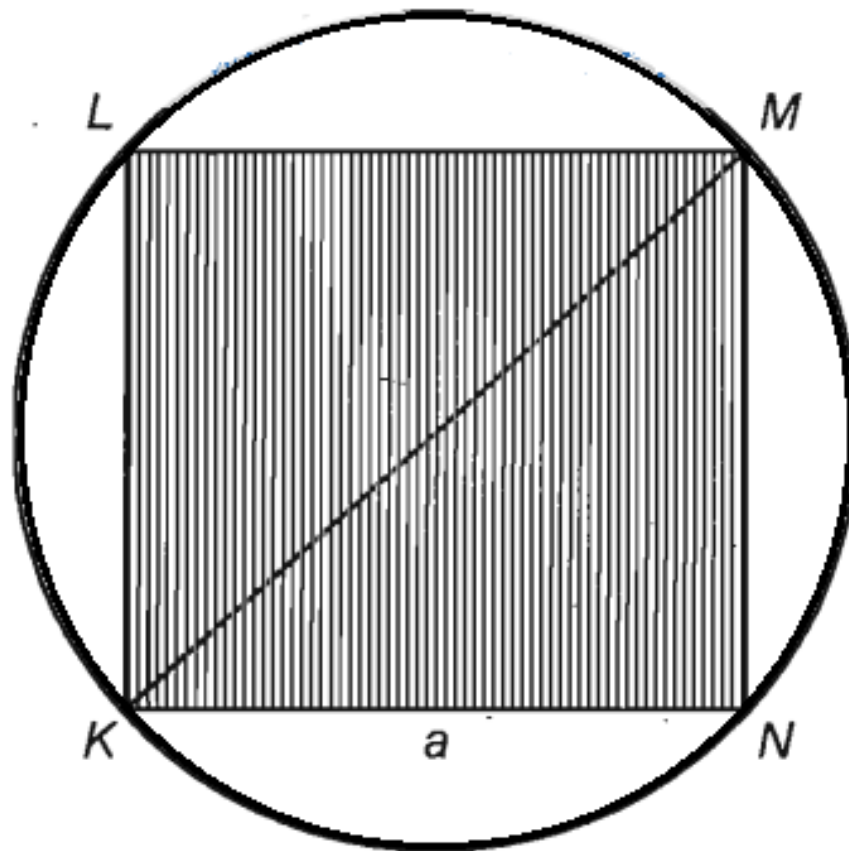
**Решение:**

$$S_{кр} = \pi R^2 = 4\pi(\text{см}^2)$$

$$S_{кв} = a^2 = 10^2 = 100(\text{см}^2)$$

$$P(A) = \frac{S_{кр}}{S_{кв}} = \frac{4\pi}{100} = \frac{\pi}{25} \approx 0,126$$

**Задача №4.** В круг , радиуса  $R$  вписан квадрат. В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат?



## Решение.

Введем обозначения:  $R$  - радиус круга,

$a$  - сторона вписанного квадрата,

$A$  - попадание точки в квадрат,

$S$  - площадь круга,

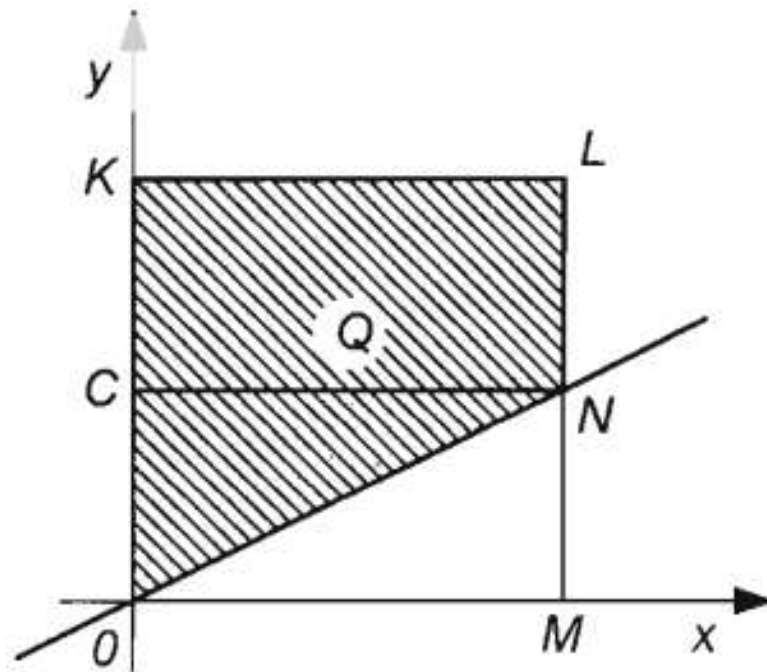
$S_1$  - площадь вписанного квадрата.

Площадь круга  $S = \pi \cdot R^2$ . Сторона вписанного квадрата через радиус описанной окружности выражается формулой:  $a = \sqrt{2} \cdot R$ , поэтому площадь квадрата  $S_1 = 2R^2$ .

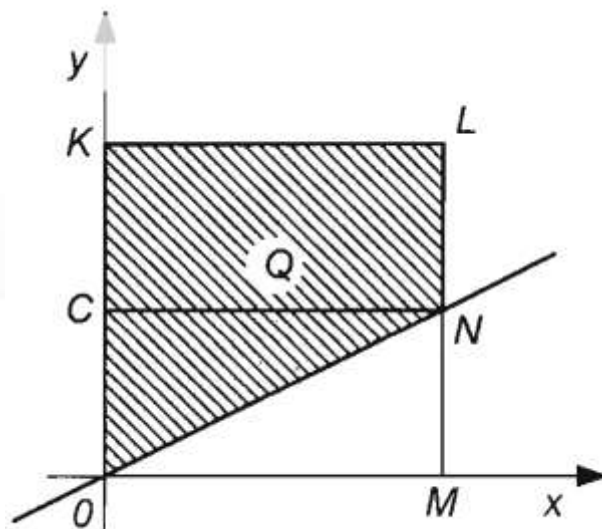
Находим искомую вероятность

$$P(A) = \frac{2R^2}{\pi \cdot R^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0,637.$$

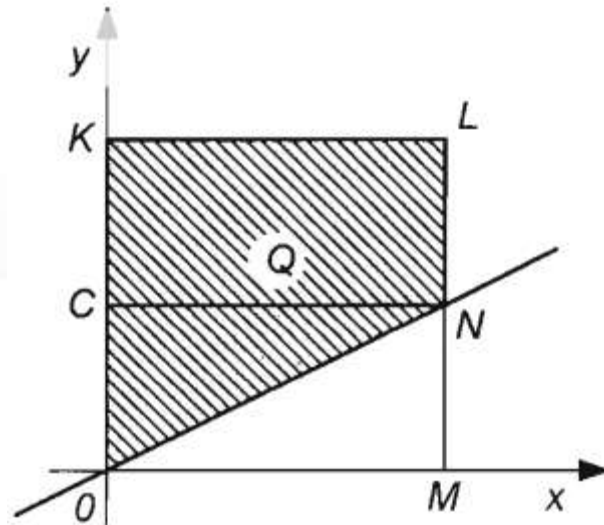
**Задача №5.** В квадрат с вершинами в точках  $O(0, 0)$ ,  $K(0, 1)$ ,  $L(1, 1)$ ,  $M(1, 0)$  наудачу брошена точка  $Q(x, y)$ .  
Найти вероятность того, что координаты этой точки удовлетворяют неравенству  $y > x/2$ .



## Решение.



Проведем прямую  $y=x/2$ , она пересечет отрезок  $ML$  в точке  $N(1; 1/2)$ . Эта прямая рассекает плоскость на две полуплоскости: для координат точек первой из них (верхней) будет выполняться неравенство  $y > x/2$ , для второй (нижней) - неравенство  $y < x/2$ .



Все точки, принадлежащие квадрату  $OKLM$  и координаты которых удовлетворяют неравенству  $y > x/2$ , находятся в многоугольнике  $OKLN$ . Этот многоугольник состоит из прямоугольника  $CKLN$  и треугольника  $OCN$ , его площадь  $S_1 = 1/2 + 1/4 = 3/4$ .

Площадь  $S$  квадрата  $OKLM$  равна единице:  $S = 1$ . Найдем искомую вероятность  $P(A) = S_1/S = 3/4/1 = 3/4 = 0,75$ .



ИТОГ.

Вопросы.

# Вопросы:

1. Что такое геометрическая вероятность? Каковы формулы геометрической вероятности (на плоскости, на прямой)?
2. Можно ли вычислить геометрические вероятности для опыта, исходы которого не являются равновероятными?